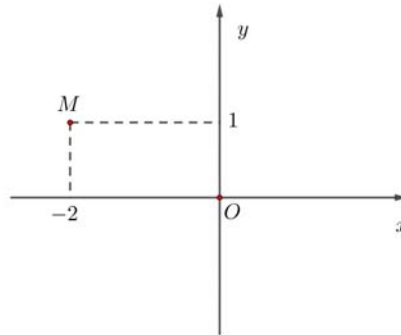


Câu 1. Điểm  $M$  trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A.  $z = -2 + i$ .

B.  $z = 1 - 2i$ .

C.  $z = 2 + i$ .

D.  $z = 1 + 2i$ .

Lời giải

**Chọn.** A.

Điểm  $M(-2;1)$  là điểm biểu diễn số phức  $z = -2 + i$ .

Câu 2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$  bằng

A.  $-\frac{2}{3}$ .

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải

**Chọn.** B.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 1.$$

Câu 3. Cho tập hợp  $M$  có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của  $M$  là

A.  $A_{10}^8$ .

B.  $A_{10}^2$ .

C.  $C_{10}^2$ .

D.  $10^2$ .

Lời giải

**Chọn.** C.

Số tập con gồm 2 phần tử của  $M$  là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử:  $C_{10}^2$ .

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng  $h$  và diện tích đáy bằng  $B$  là

A.  $V = \frac{1}{3} Bh$ .

B.  $V = \frac{1}{6} Bh$ .

C.  $V = Bh$ .

D.  $V = \frac{1}{2} Bh$ .

Lời giải

**Chọn.** A.

Câu 5. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
$y$	$-\infty$	$3$	$-1$	$3$	$-\infty$

Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(-2; 0)$ .      **B.**  $(-\infty; -2)$ .      **C.**  $(0; 2)$ .      **D.**  $(0; +\infty)$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Hàm số nghịch biến trên khoảng:  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Câu 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Gọi  $D$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b (a < b)$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành được tính theo công thức

- A.**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ .      **B.**  $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$ .      **C.**  $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$ .      **D.**  $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $D$  quanh trục hoành được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$-$
$y$	$+\infty$	$1$	$5$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A.**  $x = 1$ .      **B.**  $x = 0$ .      **C.**  $x = 5$ .      **D.**  $x = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **D.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ .

**Câu 8.** Với  $a$  là số thực dương bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\log(3a) = 3 \log a$ .      **B.**  $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$ .      **C.**  $\log a^3 = 3 \log a$ .      **D.**  $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **C.**

Ta có:

$$+ \log a^3 = 3 \log a .$$

$$+ \log(3a) = \log 3 + \log a .$$

**Câu 9.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 1$  là

- A.  $x^3 + C$ .      B.  $\frac{x^3}{3} + x + C$ .      C.  $6x + C$ .      D.  $x^3 + x + C$ .

**Lời giải**

**Chọn.**      D.

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C .$$

**Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm

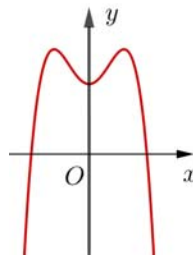
- A.  $M(3; 0; 0)$ .      B.  $N(0; -1; 1)$ .      C.  $P(0; -1; 0)$ .      D.  $Q(0; 0; 1)$ .

**Lời giải**

**Chọn.**      B.

Hình chiếu của  $A(3; -1; 1)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm  $N(0; -1; 1)$ .

**Câu 11.** Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.  $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ .      B.  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .      C.  $y = x^3 - 3x^2 + 2$ .      D.  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ .

**Lời giải**

**Chọn.**      A.

Dựa vào dạng đồ thị ta loại B, C vì đây là dạng đồ thị hàm trùng phương.

Nhánh sau cùng đi xuống nên ta có hệ số  $a < 0$ .

**Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ . Đường thẳng  $d$  có một vectơ chỉ phương là

- A.  $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$ .      B.  $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$ .      C.  $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$ .      D.  $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ .

**Lời giải.**

**Chọn.**      A.

Đường thẳng  $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (a; b; c)$ .

Suy ra đường thẳng  $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$  có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$ .

**Câu 13.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{2x} < 2^{x+6}$  là

- A.  $(0; 6)$ .      B.  $(-\infty; 6)$ .      C.  $(0; 64)$ .      D.  $(6; +\infty)$ .

Lời giải.

**Chọn.** B.

Ta có:  $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2^{2x} < 64 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x(2^x - 64) < 0 \Leftrightarrow 2^x < 64 = 2^6 \Leftrightarrow x < 6 \Rightarrow S = (-\infty; 6)$ .

**Câu 14.** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng  $3\pi a^2$  và bán kính đáy bằng  $a$ . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A.  $2\sqrt{2}a$ .      B.  $3a$ .      C.  $2a$ .      D.  $\frac{3a}{2}$ .

Lời giải.

**Chọn.** B.

Ta có:  $S_{xq} = \pi r l = 3\pi a^2 \Leftrightarrow \pi \cdot a \cdot l = 3\pi a^2 \Leftrightarrow l = 3a$ .

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(2; 0; 0)$ ,  $N(0; -1; 0)$  và  $P(0; 0; 2)$ . Mặt phẳng  $(MNP)$  có phương trình là

- A.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$ .      B.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$ .      C.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$ .      D.  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$ .

Lời giải.

**Chọn.** D.

Áp dụng công thức phương trình đoạn chắn ta suy mặt phẳng  $(MNP)$  có phương trình

là  $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$ .

**Câu 16.** Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

- A.  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ .      B.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .      C.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .      D.  $y = \frac{x}{x + 1}$ .

Lời giải

**Chọn.** D.

\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$  nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

\*  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  và  $y = \sqrt{x^2 - 1}$  mẫu vô nghiệm và không có mẫu nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

\* Ta có:  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{x + 1} = -\infty$  và  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x + 1} = +\infty$  nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

**Câu 17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$y'$		+	0	-	0	+
$y$	$-\infty$		↗ 4	↘ 2		↗ $+\infty$

Số nghiệm của phương trình  $f(x) - 2 = 0$  là

- A. 0.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 2.

Lời giải

**Chọn.** D.

Ta có :  $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$  (1)

Khi đó số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = 2$ . Dựa vào bảng biến thiên ta có : số giao điểm của hai đồ thị là 2.

Vậy phương trình  $f(x) - 2 = 0$  có 2 nghiệm.

**Câu 18.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$  trên đoạn  $[-2; 3]$  bằng

- A. 50.                      B. 5.                      C. 1.                      D. 122.

Lời giải

**Chọn.** A.

Xét hàm số  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$  trên đoạn  $[-2; 3]$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \sqrt{2} \in [-2; 3] \\ x = -\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases} .$$

$$f(0) = 5, f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 1, f(-2) = 5, f(3) = 50.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 50 khi  $x = 3$ .

**Câu 19.** Tích phân  $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$  bằng

- A.  $\frac{16}{225}$ .                      B.  $\log \frac{5}{3}$ .                      C.  $\ln \frac{5}{3}$ .                      D.  $\frac{2}{15}$ .

Lời giải

**Chọn.** C.

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| \Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln \frac{5}{3}.$$

**Câu 20.** Gọi  $z_1$  và  $z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $4z^2 - 4z + 3 = 0$ . Giá trị của biểu thức  $|z_1| + |z_2|$  bằng

- A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $2\sqrt{3}$ .                      C. 3.                      D.  $\sqrt{3}$ .

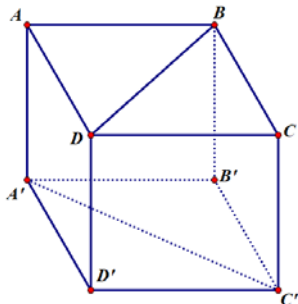
Lời giải

**Chọn.** D.

Ta có  $\Delta' = 4 - 12 = -8 = 8i^2$ . Các nghiệm của phương trình là  $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

$$\text{Do đó } |z_1| + |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

**Câu 21.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$  (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BD$  và  $A'C'$  bằng



A.  $a\sqrt{3}$ .

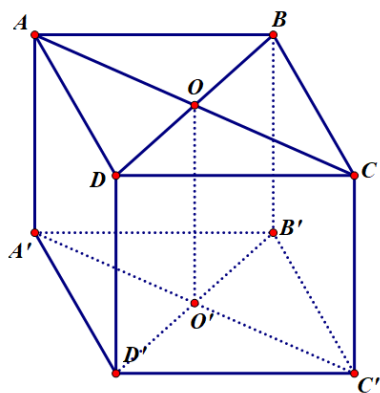
**B.  $a$ .**

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn. B.**



Ta có

$BD \perp AC$  (do  $ABCD$  là hình vuông)

$BD \perp AA'$  (do  $ABCD$  là hình lập phương)

$\Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

Gọi  $O, O'$  lần lượt là tâm của hai hình vuông  $ABCD, A'B'C'D'$ .

Khi đó  $OO' \perp A'C'$  và  $OO \perp BD$  nên  $OO'$  là đoạn vuông góc chung của  $BD$  và  $A'C'$

$\Rightarrow d(BD, A'C') = OO' = a$ .

**Câu 22.** Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.120.000 đồng.

**B. 102.423.000 đồng.**

C. 102.016.000 đồng.

D. 102.017.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn. B.**

Với cách tính như trên thì đây là bài toán lãi kép với công thức tính:

$$C = A(1+r)^N$$

Với  $A = 100.10^6$  đồng,  $r = 0,4\% = 0,004$ ,  $N = 6$

$$\Rightarrow C = 100.10^6.(1,004)^6 \approx 102.424.128 \text{ đồng.}$$

**Câu 23.** Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A.  $\frac{5}{22}$ .

B.  $\frac{6}{11}$ .

C.  $\frac{5}{11}$ .

D.  $\frac{8}{11}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Số phần tử của không gian mẫu là:  $n(\Omega) = C_{11}^2 = 55$ .

Số cách chọn 2 quả cầu cùng màu:  $C_5^2 + C_6^2 = 25$ .

Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu là:  $P = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$ .

**Câu 24.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1;2;1)$  và  $B(2;1;0)$ . Mặt phẳng qua  $A$  và vuông góc với  $AB$  có phương trình là

A.  $3x - y - z - 6 = 0$ .

B.  $3x - y - z + 6 = 0$ .

C.  $x + 3y + z - 5 = 0$ .

D.  $x + 3y + z - 6 = 0$ .

Lời giải

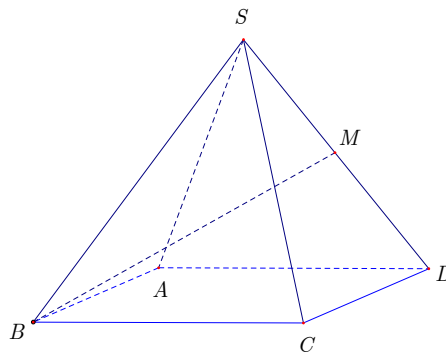
**Chọn B**

Mặt phẳng  $(P)$  qua  $A(-1;2;1)$  và vuông góc với  $AB$  nên có một vectơ pháp tuyến là

$\overline{AB} = (3; -1; -1)$ . Do đó mặt phẳng  $(P)$  có phương trình là:  $3(x+1) - 1(y-2) - 1(z-1) = 0$

$3x - y - z + 6 = 0$ .

**Câu 25.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SD$  (tham khảo hình vẽ dưới đây).



Tang của góc giữa  $BM$  và  $(ABCD)$  bằng.

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

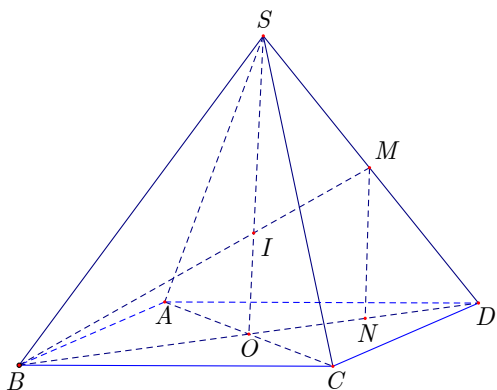
B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $\frac{2}{3}$ .

D.  $\frac{1}{3}$ .

Lời giải

**Chọn D**



Gọi  $O$  là tâm đáy,  $I$  là giao của  $BM$  và  $SO$ , vì hình chóp  $S.ABCD$  đều nên  $SO \perp (ABCD)$ , gọi  $N$  là hình chiếu của  $M$  lên  $BD$ , dễ thấy  $MN \parallel SO$  nên  $N$  là hình chiếu của  $M$  lên  $(ABCD)$ . Vậy  $(\widehat{BM, (ABCD)}) = \widehat{MBN} = \widehat{IBO}$ .

Ta có tam giác  $SBD$  vuông cân tại  $S$  (vì  $SB = SD = a$ ,  $BD = a\sqrt{2}$ ) nên  $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì  $I$  là trọng tâm tam giác  $SBD$  nên  $IO = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ .

$$\text{Vậy } \tan \widehat{IBO} = \frac{IO}{BO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

**Câu 26.** Với  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $C_n^1 + C_n^2 = 55$ . Số hạng không chứa  $x$  trong khai triển của biểu thức  $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$  bằng

A. 322560.

B. 3360.

C. 80640.

D. 13440.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Phương trình } C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 55 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow n = 10.$$

Khai triển trở thành  $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ .

Ta có số hạng tổng quát của khai triển:  $T_{k+1} = C_{10}^k x^{3(10-k)} \cdot \frac{2^k}{x^{2k}} = C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{30-5k}$ . Để số hạng không chứa  $x$  thì  $k = 6$ . Vậy số hạng cần tìm là  $C_{10}^6 \cdot 2^6 = 13440$ .

**Câu 27.** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình  $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$  bằng



A.  $\frac{82}{9}$ .

B.  $\frac{80}{9}$ .

C. 9.

D. 0.

Lời giải

**Chọn A**

Điều kiện  $x > 0$ .

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 x \cdot \log_{3^2} x \cdot \log_{3^3} x \cdot \log_{3^4} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{24} (\log_3 x)^4 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện  $x > 0$  nên tổng các nghiệm của phương trình đã cho là  $\frac{82}{9}$ .

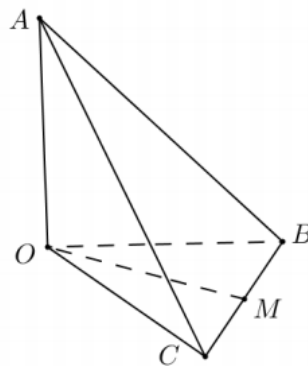
**Câu 28.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau và  $OA = OB = OC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng  $OM$  và  $AB$  bằng

A.  $90^\circ$ .

B.  $30^\circ$ .

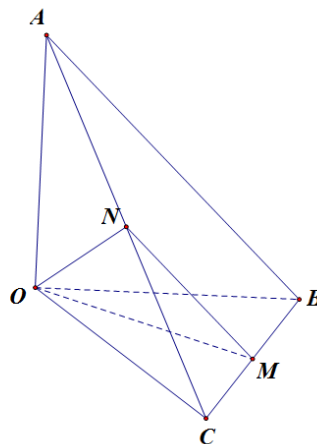
**C.  $60^\circ$ .**

D.  $45^\circ$ .



Lời giải

**Chọn C**



Giả sử  $OA = OB = OC = a$ . Gọi  $N$  là trung điểm  $AC$ .

Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $MN \parallel AB$  và  $MN = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Do đó  $(\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN})$ .

Xét các tam giác  $OAC$  và  $OBC$  vuông cân tại  $O$  có  $ON, OM$  lần lượt là các trung tuyến nên

$$ON = OM = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Như vậy tam giác  $OMN$  có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, từ đó  $(\widehat{OM, MN}) = 60^\circ$ .

**Câu 29.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai đường thẳng  $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$ ,  
 $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$  và mặt phẳng  $(P): x+2y+3z-5=0$ . Đường thẳng vuông góc với  
 $(P)$ , cắt  $d_1$  và  $d_2$  có phương trình là

- A.**  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ .    **B.**  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$ .  
**C.**  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$ .    **D.**  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Viết lại phương trình

$$d_1: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 5 - 3t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, t, t' \in \mathbb{R}.$$

Giả sử đường thẳng cần tìm là  $\Delta$  cắt hai đường thẳng  
 $d_1$  và  $d_2$  lần lượt tại  $A(3-t; 3-2t; -2+t)$  và  
 $B(5-3t'; -1+2t'; 2+t')$ .

Một vectơ chỉ phương của  $\Delta$  là

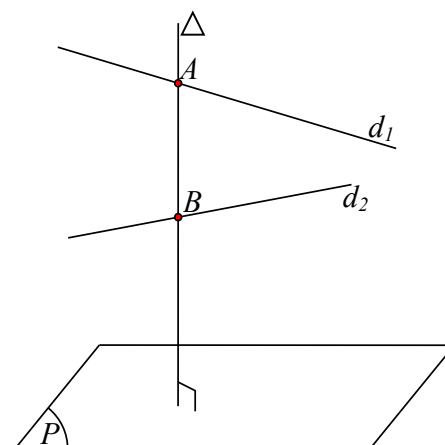
$$\vec{u}_\Delta = \vec{AB} = (2-3t'+t; -4+2t'+2t; 4+t'-t).$$

Một vectơ pháp tuyến của  $(P)$  là  $\vec{n}_p = (1; 2; 3)$

Vì  $\Delta \perp (P)$  nên  $\vec{u}_\Delta$  cùng phương với  $\vec{n}_p$  hay

$$\begin{cases} 2-3t'+t = k \\ -4+2t'+2t = 2k \\ 4+t'-t = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t'+t - k = -2 \\ 2t' + 2t - 2k = 4 \\ t' - t - 3k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Suy ra  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(2; 1; 3)$ ,  $\vec{u}_\Delta = (1; 2; 3)$ , do đó  $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ , đáp án. **A.**



**Câu 30.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$  đồng biến trên  
 khoảng  $(0; +\infty)$ ?

- A.** 5.                      **B.** 3.                      **C.** 0.                      **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} \left( 3x^2 + \frac{1}{x^6} \right) (*).$$

$$\text{Mà } 3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6}} = 4.$$

Do đó từ (\*) suy ra  $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$ . Vậy có 4 giá trị nguyên âm của  $m$  là  $-1; -2; -3; -4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 31.** Cho  $(H)$  là hình phẳng giới hạn bởi parabol  $y = \sqrt{3}x^2$ , cung tròn có phương trình  $y = \sqrt{4-x^2}$  (với  $0 \leq x \leq 2$ ) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình  $(H)$  bằng

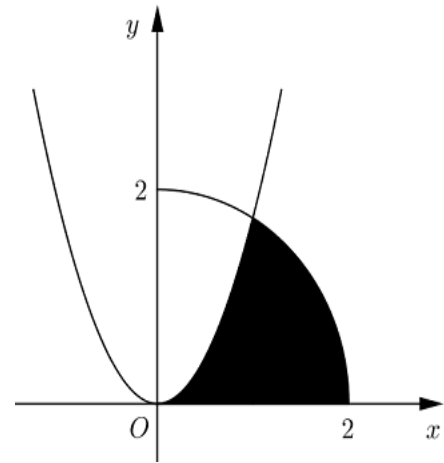
A.  $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$ .

B.  $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$ .

C.  $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$ .

D.  $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$ .

Lời giải



**Chọn.** B.

Phương trình hoành độ giao điểm:  $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (do  $0 \leq x \leq 2$ ).

$$\text{Khi đó } S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = I + J.$$

$$\text{Tính } I = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx = \frac{\sqrt{3}x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Tính } J = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx: \text{ Đặt } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt \text{ và } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x=2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ Khi đó}$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6} \text{ (đvdt).}$$

**Câu 32.** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$  với  $a, b, c$  là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c.$$

A.  $P = 24$ .

B.  $P = 12$ .

C.  $P = 18$ .

D.  $P = 46$ .

Lời giải

**Chọn.** **D.**

$$\text{Ta có } \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \int_1^2 \left( x^{-\frac{1}{2}} - (x+1)^{-\frac{1}{2}} \right) dx = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \Big|_1^2$$

$$= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2. \text{ Suy ra } \begin{cases} a = 32 \\ b = 12 \\ c = 2 \end{cases} \text{ nên } P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46.$$

**Câu 33.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác  $BCD$  và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện  $ABCD$ .

**A.**  $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ .

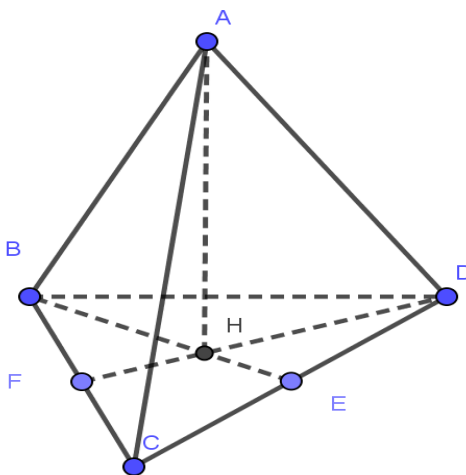
**B.**  $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ .

**C.**  $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ .

**D.**  $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**



Gọi  $E, F$  là trung điểm cạnh  $DC, BC$ .

Do  $\triangle BCD$  là tam giác đều, nên  $BE, DF$  cũng là đường cao, đường phân giác của  $\triangle BCD$ .

Các mặt bên cũng là tam giác đều.

Gọi  $BE \cap CF = \{H\}$  thì  $AH$  là đường cao của tứ diện.

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Đường tròn nội tiếp } \triangle BCD \text{ có bán kính } r = HE = \frac{1}{3} AE = \frac{4\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ là: } S_{xq} = 2\pi r h = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \pi = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

**Câu 34.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình  $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$  có nghiệm dương?

**A.** 1.

**B.** 2.

C. 4.

D. 3.

**Lời giải**

**Chọn.** **B.**

Ta có:  $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$  (1)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + (m-2) = 0.$$

Đặt  $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ , phương trình trở thành:  $t^2 - 2t + (m-2) = 0$  (2)

Để phương trình (1) có nghiệm dương thì phương trình (2) có nghiệm  $t > 1$ .

$$t^2 - 2t + (m-2) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 3-m$$

Do  $t > 1$  nên  $3-m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \Rightarrow 0 < m < 3 \Rightarrow m \in \{1; 2\}$

Vậy có 2 giá trị của  $m$  thỏa mãn.

**Câu 35.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin x$  có nghiệm thực?

**A.** 5.

**B.** 7.

**C.** 3.

**D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

$$\sqrt[3]{m+3}\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin x \Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin^3 x$$

$$\Leftrightarrow m+3\sin x + 3\sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin^3 x + 3\sin x \quad (1).$$

Xét hàm số  $f(t) = t^3 + 3t$ . Ta có  $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ .

Do đó hàm số  $f(t)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{m+3}\sin x) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3}\sin x = \sin x \Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x = m.$$

Đặt  $\sin x = t$  ( $t \in [-1; 1]$ ). Ta được phương trình  $t^3 - 3t = m$ .

Đặt  $g(t) = t^3 - 3t$  ( $t \in [-1; 1]$ ). Ta có  $g'(t) = 3t^2 - 3$ ;  $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ .

BBT

$x$	-1		1
$g'$	0	-	0
$g$	2		-2

Vậy để phương trình có nghiệm thì  $m \in [-2; 2]$ . Vậy chọn A.

**Câu 36.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 0.

**D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn.** **B.**

Xét hàm số  $f(x) = x^3 - 3x + m$  ( $x \in [0; 2]$ ). Ta có  $f'(x) = 3x^2 - 3$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

BBT

$x$	0	1	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$m$	$m-2$	$m+2$	

Suy ra GTLN của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng  $M = \text{Max}\{|m-2|, |m+2|\}$ .

$$\text{Do đó } \begin{cases} |m-2|=3 \\ |m+2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-1 \\ m=1 \\ m=-5 \end{cases}.$$

Với  $m=1$  thì  $M = \text{Max}\{|1-2|, |1+2|\} = 3$ . (TM)

Với  $m=-1$  thì  $M = \text{Max}\{|-1-2|, |-1+2|\} = 3$ . (TM)

Với  $m=5$  thì  $M = \text{Max}\{|5-2|, |5+2|\} = 7$ . (KTM)

Với  $m=-5$  thì  $M = \text{Max}\{|-5-2|, |-5+2|\} = 7$ . (KTM)

Vậy  $S = \{-1; 1\}$ . Chọn **B**

**Câu 37.** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  thỏa mãn  $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ ,  $f(0) = 1$  và  $f(1) = 2$ .

Giá trị của biểu thức  $f(-1) + f(3)$  bằng

**A.**  $4 + \ln 5$ ..

**B.**  $2 + \ln 15$ ..

**C.**  $3 + \ln 15$ ..

**D.**  $\ln 15$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **C.**

• Trên khoảng  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ :  $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(2x-1) + C_1$ .

Lại có  $f(1) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$ .

• Trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ :  $f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln(1-2x) + C_2$ .

Lại có  $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$ .

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra  $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$ ..

**Câu 38.** Cho số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$  và  $|z| > 1$ . Tính

$P = a + b$ .

**A.**  $P = -1$ ..

**B.**  $P = -5$ ..

**C.**  $P = 3$ ..

**D.**  $P = 7$ ..

**Lời giải**

**Chọn.** **D.**

Đặt  $m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , ta có  $m \in \mathbb{R}$  và  $m > 1$ .

$$z + 2 + i - |z|(1+i) = 0 \Leftrightarrow a + 2 - m + (b + 1 - m)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - m = 0 \\ b + 1 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ m = a + 2 \end{cases}$$

Kết hợp các điều trên ta có phương trình:

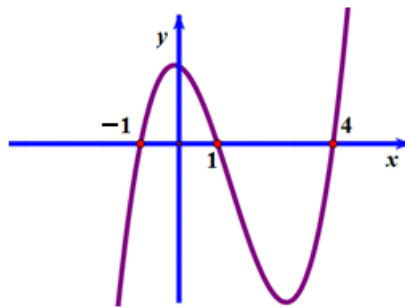
$$\sqrt{a^2 + (a+1)^2} = a + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

Với  $a = -1: b = 0, m = 1$  (loại vì  $m > 1$ )

Với  $a = 3: b = 4, m = 5$ . (nhận)

Vậy  $P = a + b = 3 + 4 = 7$ .

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Hàm số  $y = f(2-x)$  đồng biến trên khoảng

A.  $(1; 3)$ .

B.  $(2; +\infty)$ .

C.  $(-2; 1)$ .

D.  $(-\infty; -2)$ .

Lời giải

**Chọn C**

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  ta có  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$ .

Ta có  $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$ .

Để hàm số  $y = f(2-x)$  đồng biến thì  $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

**Câu 40.** Cho hàm số  $y = \frac{-x+2}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $A(a; 1)$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của  $a$  để có đúng một tiếp tuyến của  $(C)$  đi qua  $A$ . Tổng các giá trị của tất cả các phần tử của  $S$  bằng

A. 1.

B.  $\frac{3}{2}$ .

C.  $\frac{5}{2}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Gọi đường thẳng đi qua  $A(a;1)$  có hệ số góc  $k$  là  $y = k(x-a)+1$ . Đường thẳng này là tiếp

tuyến của hệ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm  $\begin{cases} \frac{-x+2}{x-1} = k(x-a)+1 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ . Thay  $k$  ở

phương trình hai vào phương trình một của hệ ta có:

$$\frac{-x+2}{x-1} = \frac{a-x}{(x-1)^2} + 1 \Leftrightarrow (-x+2)(x-1) = a-x+(x-1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 3 + a = 0(*)$$

Để chỉ có một tiếp tuyến qua  $A$  thì phương trình (\*) phải có nghiệm kép hay

$$\Delta' = 9 - 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1 khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2 - 6 + 3 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6 - 2a > 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

Vậy tổng các phần tử của  $S$  là  $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ .

**Câu 41.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1;1;2)$ . Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  và cắt các trục  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ ,  $z'Oz$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  sao cho  $OA = OB = OC \neq 0$ ?

**A.** 3.

**B.** 1.

**C.** 4.

**D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

Gọi phương trình mặt phẳng cần tìm là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ . Do  $M(1;1;2)$  thuộc mặt phẳng nên

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 (*)$$

Mặt khác, ta có  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$  nên từ  $OA = OB = OC \neq 0$  suy ra  $|a| = |b| = |c| = \alpha > 0$  từ đây  $(a;b;c)$  có thể nhận các bộ số sau  $(\alpha;\alpha;\alpha)$ ;  $(-\alpha;\alpha;\alpha)$ ;  $(\alpha;-\alpha;\alpha)$ ;  $(\alpha;\alpha;-\alpha)$ ;  $(-\alpha;-\alpha;\alpha)$ ;  $(-\alpha;\alpha;-\alpha)$ ;  $(\alpha;-\alpha;-\alpha)$ ;  $(-\alpha;-\alpha;-\alpha)$  có 8 bộ số ứng với mỗi bộ kết hợp với (\*) ta chỉ có 3 bộ thỏa mãn.  $(\alpha;\alpha;\alpha)$ ,  $(-\alpha;\alpha;\alpha)$ ,  $(\alpha;-\alpha;\alpha)$  ứng với mỗi bộ cho ta một mặt phẳng.

**Câu 42.** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$  và  $u_{n+1} = 2u_n$  với mọi  $n \geq 1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $n$  để  $u_n > 5^{100}$  bằng

**A.** 247.

**B.** 248.

**C.** 229.

**D.** 290.

**Lời giải**

**Chọn.** **B.**

Từ điều kiện  $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1$  ta có  $(u_n)$  là cấp số nhân với công bội  $q = 2$ .

$$\text{Do đó } u_{10} = 2^9 u_1$$

$$\text{Ta có } \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$$

$$\Leftrightarrow \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log(2^9 u_1)} = 2 \log(2^9 u_1)$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18 \log 2 - 2 \log u_1} = 18 \log 2 + 2 \log u_1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2 - m - \log u_1} = m + \log u_1 \quad (m = 18 \log 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \geq -m \\ 2 - m - \log u_1 = \log^2 u_1 + 2m \cdot \log u_1 + m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \geq -m \\ \log^2 u_1 + (2m + 1) \cdot \log u_1 + m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \geq -m \\ \left[ \begin{aligned} \log u_1 = -m - 2 &\Leftrightarrow \log u_1 = -m + 1 = 1 - 18 \log 2 = \log \frac{10}{2^{18}} \Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2^{17}} \\ \log u_1 = -m + 1 \end{aligned} \right. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có  $u_n = 2^{n-1} u_1 = 2^{n-1} \cdot \frac{5}{2^{17}} = 2^{n-18} \cdot 5$ .

Nên  $u_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} \cdot 5 > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18 + 99 \log_2 5 \approx 247.871$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $n$  thỏa mãn là:  $n = 248$ .

**Câu 43.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

**D. 4.**

**Lời giải**

**Chọn. D.**

Xét hàm số  $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$  có  $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -32 + m \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -5 + m \\ x_3 = 0 \Rightarrow y_3 = m \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$		$-1$		$0$		$2$		$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$	↘		$-5 + m$	↗		$m$	↘	
				$-32 + m$			$+\infty$	↗	

Dựa vào BBT để đồ thị hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ -5 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5. \text{ Với } m \text{ nguyên nên ta có } m \in \{1; 2; 3; 4\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 44.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 2; 1), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$  đường thẳng đi qua tâm của đường tròn nội tiếp của tam giác  $OAB$  và vuông góc với mặt phẳng  $(OAB)$  có phương trình là:

**A.**  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ . **B.**  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$ .

**C.**  $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$ .

**D.**  $\frac{x+\frac{9}{2}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

Ta có  $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 1), \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow OA = 3, OB = 4$ .

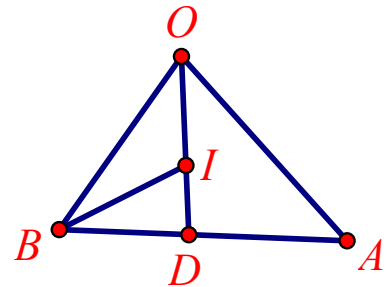
$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 4(1; -2; 2)$ .

Gọi  $D(x; y; z)$  là chân đường phân giác hạ từ  $O$  đến  $AB$ .

Ta có  $\frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BO} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = -\frac{3}{4}\left(x+\frac{8}{3}\right) \\ y-2 = -\frac{3}{4}\left(y-\frac{4}{3}\right) \\ z-1 = -\frac{3}{4}\left(z-\frac{8}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{12}{7} \\ z=\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{21}; -\frac{20}{27}\right) \Rightarrow BD = \frac{20}{7}$ .



Gọi  $I(x; y; z)$  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác  $ABC$

Ta có  $\frac{IO}{ID} = \frac{OB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{DI} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{5}x \\ y = -\frac{7}{5}\left(y-\frac{12}{7}\right) \\ z = -\frac{7}{5}\left(z-\frac{12}{7}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$

$\Rightarrow$  đường thẳng cần tìm đi qua  $I(0; 1; 1)$  và có véc tơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; -2; 2)$ .

Thay tọa độ  $I(0; 1; 1)$  vào thỏa mãn phương trình  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$ .

**Câu 45.** Cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $ABEF$  có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi  $S$  là điểm đối xứng với  $B$  qua đường thẳng  $DE$ . Thể tích của khối đa diện  $ABCDSEF$  bằng

**A.**  $\frac{7}{6}$ .

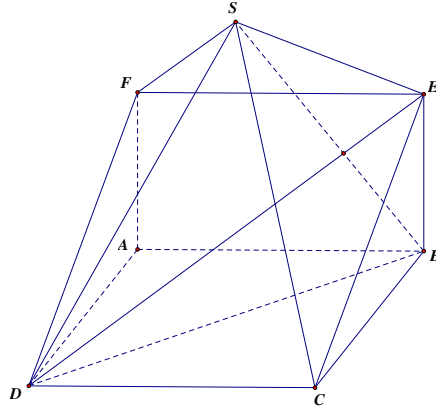
**B.**  $\frac{11}{12}$ .

**C.**  $\frac{2}{3}$ .

**D.**  $\frac{5}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **D.**



Gọi  $(H)$  là khối đa diện  $ABCDSEF$  ta có  $V_{(H)} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE}$ .

\* Vì  $ADF.BCE$  là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân nên ta có:

$$V_{ADF.BCE} = AB.S_{BCE} = \frac{1}{2}.$$

\* Vì tứ giác  $CDFE$  là hình chữ nhật và  $S$  là điểm đối xứng với  $B$  qua đường thẳng  $DE$  nên ta có:

$$V_{S.CDFE} = 2V_{S.CDE} = 2.V_{B.CDE} = 2.V_{D.BCE} = 2 \cdot \frac{1}{3} CD.S_{BCE} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$* V_{(H)} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

**Câu 46.** Xét các số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$ . Tính  $P = a + b$  khi  $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$  đạt giá trị lớn nhất.

**A.**  $P = 10$ .

**B.**  $P = 4$ .

**C.**  $P = 6$ .

**D.**  $P = 8$ .

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

**Cách 1**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8a - 6b + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } M = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2}.$$

$$\text{Suy ra } M^2 \leq 2 \left[ (a + 1)^2 + (b - 3)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 \right]$$

$$\leq 2 \left[ 2(a^2 + b^2) - 4b + 12 \right]$$

$$\leq 2(16a + 12b - 40 - 4b + 12)$$

$$\leq 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + b - 7).$$

$$\text{Khi đó: } \frac{M^2}{8} \leq 4a + b - 7 \Leftrightarrow \frac{M^2}{8} + 7 \leq 4a + b.$$

$$\text{Ta có } 4a + 2b = 4(a - 4) + 2(b - 3) + 22$$

$$\text{Nên } 4a + 2b - 22 = 4(a - 4) + 2(b - 3) \leq \sqrt{(4^2 + 2^2) \left[ (a - 4)^2 + (b - 3)^2 \right]}$$

$$\Rightarrow 4a + 2b - 22 \leq 10$$

$$\Rightarrow 4a + 2b \leq 32 \Rightarrow \frac{M^2}{8} \leq 25 \Rightarrow M^2 \leq 200 \Rightarrow M \leq 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } M_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} 4a + 2b = 32 \\ 2a - 4b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Khi đó  $P = a + b = 10$ .

### Cách 2

$$\text{Ta có } |z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{5} \sin \alpha + 4 \\ b = \sqrt{5} \cos \alpha + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } M = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$$

$$= \sqrt{10\sqrt{5} \sin \alpha + 30} + \sqrt{6\sqrt{5} \sin \alpha + 8\sqrt{5} \cos \alpha + 30}.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski

$$M \leq \sqrt{2(16\sqrt{5} \sin \alpha + 8\sqrt{5} \cos \alpha + 60)} = \sqrt{2[8\sqrt{5}(2 \sin \alpha + \cos \alpha) + 60]} \leq 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Nên } M_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ khi } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \sin \alpha + 4 = 6 \\ b = \sqrt{5} \cos \alpha + 3 = 4 \end{cases}.$$

Vậy  $P = a + b = 10$ .

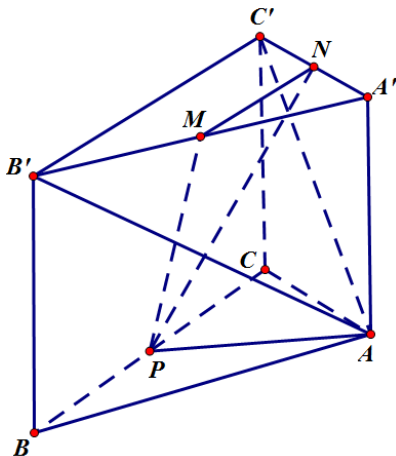
**Câu 47.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 2\sqrt{3}$  và  $AA' = 2$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $A'B', A'C'$  và  $BC$  (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(MNP)$  bằng

A.  $\frac{6\sqrt{13}}{65}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{13}}{65}$ .

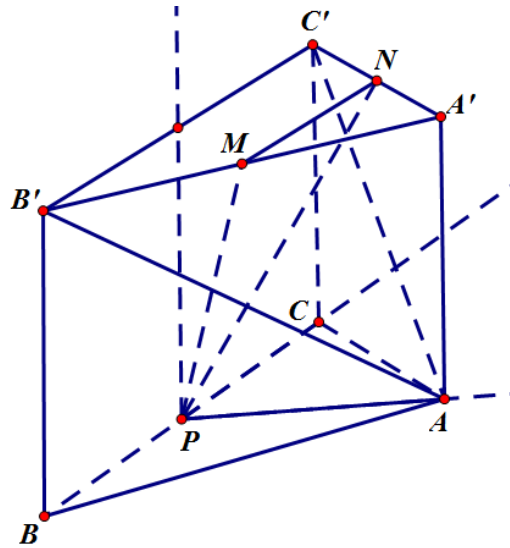
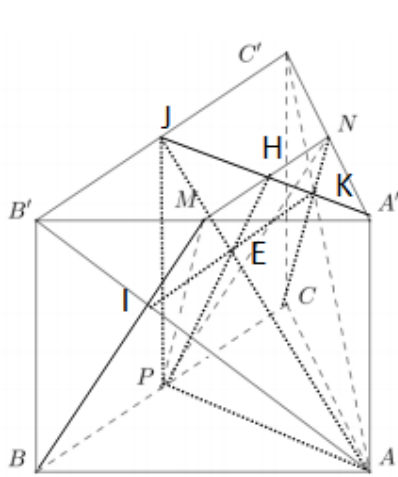
C.  $\frac{17\sqrt{13}}{65}$ .

D.  $\frac{18\sqrt{13}}{65}$ .



Lời giải

**Chọn B.**



Ta có: Lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  nên tam giác  $ABC$  đều khi đó  $AP = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ .

Mặt khác:  $AA' \perp (ABC)$ .

Gắn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với  $O \equiv P$ ; tia  $PA$  trùng với tia  $Ox$ , tia  $PC$  trùng với tia  $Oy$ , tia  $Pz$  vuông góc với  $(ABC)$  Khi đó:

$$P(0;0;0), M\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right), N\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right), A(3;0;0), B'(0;-\sqrt{3};2), C'(0;-\sqrt{3};2).$$

Ta có:  $\overline{PM}\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right); \overline{PN}\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$ . Do đó vecto pháp tuyến của  $(MNP)$  là

$$\vec{n}_1 = \left(-2\sqrt{3}; 0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta lại có:  $\overline{AB'} = (-3; -\sqrt{3}; 2); \overline{AC'} = (-3; \sqrt{3}; 2)$ . Do đó vecto pháp tuyến của  $(AB'C')$  là

$$\vec{n}_2 = (-4\sqrt{3}; 0; -6\sqrt{3}).$$

Gọi  $\alpha$  góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(MNP)$ . Khi đó:  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{13}}{65}$ .

**Cách khác:**

Mặt phẳng  $(MNP)$  chính là mặt phẳng  $(MNBC)$ . Dễ dàng xác định được giao tuyến của  $(MNBC)$  và  $(AB'C')$  là  $IK$  (như hình vẽ).

$$\text{Ta có } \begin{cases} AJ \perp IK \\ PH \perp IK \end{cases} \Rightarrow ((MNBC), (AB'C')) = (AJ, PH).$$

Xét hình chữ nhật  $AA'JP$ , dùng tính chất trong hình phẳng ta tính  $\cos \widehat{PEA} = \frac{\sqrt{13}}{65}$ .

**Câu 48.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;1), B(3;-1;1)$  và  $C(-1;-1;1)$ . Gọi  $(S_1)$  là mặt cầu có tâm  $A$ , bán kính bằng 2;  $(S_2)$  và  $(S_3)$  là hai mặt cầu có tâm lần lượt là  $B, C$  và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu  $(S_1), (S_2), (S_3)$ ?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

### Lời giải

**Chọn.** B.

**Cách 1:**

Gọi  $\vec{n} = (a; b; c)$  với  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  là VTPT của mặt phẳng  $(P)$  tiếp xúc với cả ba mặt cầu  $(S_1), (S_2), (S_3)$ ;  $M$  là trung điểm  $BC \Rightarrow M(1; -1; 1)$ ;  $\overline{BC} = (-4; 0; 0)$ .

**TH1:**  $(P)$  đi qua trung điểm  $M$  của  $BC \Rightarrow (P): a(x-1) + b(y+1) + c(z-1) = 0$  hay  $(P): ax + by + cz - a + b - c = 0$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |2a| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b| = 2|2a| \\ 4a^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4a}{3} \\ c^2 = \frac{11a^2}{9} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{4a}{3} \\ c^2 = \frac{11a^2}{9} \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (1) có 2 nghiệm, hệ (2) có 2 nghiệm và các nghiệm đó không trùng nhau. Vậy trường hợp này có 4 mặt phẳng  $(P)$ .

**TH2:**  $(P)$  song song với  $BC \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow (P): by + cz + d = 0$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} d(A; (P)) = 2 \\ d(B; (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c + d| = 2\sqrt{b^2 + c^2} \\ |-b + c + d| = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \\ (-b + c + d)^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

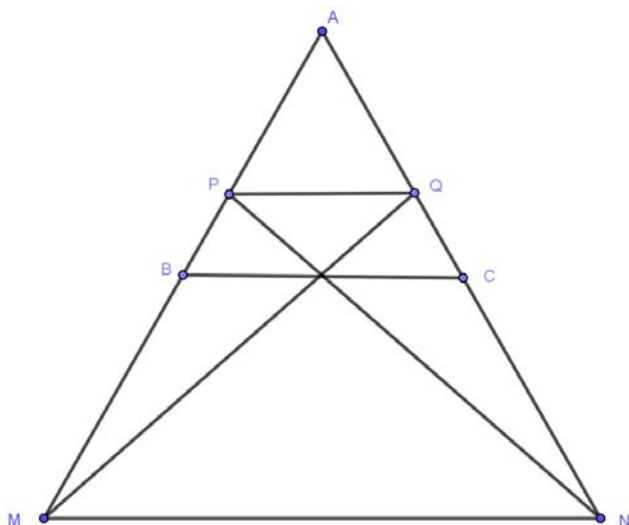
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 4b - c \\ (-b + c + d)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 4b - c \\ c^2 = 8b^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -c \\ (-b + c + d)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -c \\ c = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Hệ (3) có 2 nghiệm, hệ (4) có 1 nghiệm và các nghiệm này không trùng nhau. Vậy trường hợp này có 3 mặt phẳng  $(P)$ .

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng  $(P)$ .

**Cách 2:**



Ta có  $AB = AC = \sqrt{13}, BC = 4, d(A; BC) = 3$ . Do  $R_1 = 2R_2 = 2R_3$ , nên các khoảng cách từ các điểm  $A$  đến  $(P)$  sẽ gấp đôi các khoảng cách từ các điểm  $B, C$  đến  $(P)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là điểm đối xứng của  $A$  qua  $B, C$  và  $P, Q$  là điểm trên cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AP = 2BP, AQ = 2QC$ . Bài toán quy về tìm các mặt phẳng  $(P)$  chính là các mặt phẳng đi qua  $MN, MQ, NP, PQ$  sao cho  $d(A; (P)) = 2$  là xong.

**TH1:** Ta có  $d(A; PQ) = 2$  nên chỉ có duy nhất một mặt phẳng  $(P)$  qua  $PQ$  sao cho  $d(A; (P)) = 2$ .

**TH2:**  $d(A; MN), d(A; MQ); d(A; NP)$  đều lớn hơn 2 nên mỗi trường hợp sẽ có đúng hai mặt phẳng qua các cạnh  $MN, MQ, NP$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến nó bằng 2.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 49.** Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B, 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

**A.**  $\frac{11}{630}$ .

**B.**  $\frac{1}{126}$ .

**C.**  $\frac{1}{105}$ .

**D.**  $\frac{1}{42}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Không gian mẫu: Xếp 10 học sinh thành hàng ngang

$\Rightarrow |\Omega| = 10!$  cách xếp.

Gọi  $A$  là biến cố: “đề trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau”.

Ta có cách xếp như sau:

- Đầu tiên xếp 5 học sinh của lớp 12C, có 5! cách xếp.

- Khi đó, giữa 5 học sinh của lớp 12C có tất cả 6 chỗ trống (gồm 4 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống trước, sau). Do 2 học sinh của lớp 12C không thể đứng gần nhau nên buộc phải có 4 người (của lớp 12A và 12B)

- Ta xét hai trường hợp sau :

+ TH1 : Có 1 học sinh  $A$  hoặc  $B$  ở phía ngoài (trước hàng hoặc sau hàng), 4 học sinh còn lại xếp vào 4 chỗ trống ở giữa các bạn  $C$ , có  $2.5!$  cách xếp.

A	C	B	C	A	C	B	C	B	C	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

+ TH2 : có một cặp học sinh  $A$  và  $B$  vào một chỗ trống, 3 học sinh còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại, có  $2.3.2.4.3!$  cách xếp.

	C	AB	C	A	C	B	C	B	C	
--	---	----	---	---	---	---	---	---	---	--

- Vậy  $|A| = 5!(2.5! + 2.3.2.4.3!)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5!(2.5! + 2.3.2.4.3!)}{10!} = \frac{11}{630}.$$

**Câu 50.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[0;1]$  thỏa mãn  $f(1) = 0$ ,  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$  và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

**A.**  $\frac{7}{5}$ .

**B.** 1.

**C.**  $\frac{7}{4}$ .

**D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \quad (\text{vì } f(1) = 0)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -3 \int_0^1 x^2 f(x) dx = -1$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_0^1 14x^3 f'(x) dx = -14 \\ \int_0^1 49x^6 dx = 7x^7 \Big|_0^1 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 14x^3 f'(x) dx + \int_0^1 49x^6 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$$



$$\text{Mà } \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0$$

Nên đẳng thức xảy ra khi chỉ khi  $f'(x) + 7x^3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$$

$$\text{Ta có } f(1) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{4} \int_0^1 (1 - x^4) dx = \frac{7}{4} \left( x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{4} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{7}{5}$$

**---HẾT---**